MONADEN

von der Theorie zur Praxis

Frank Rosemeier

27. Mai 2004
3. Juni 2004

Gliederung

I. Theorie

Inhalt von Teil I

Monadologie

Kategorientheorie

- Monoide
- Kategorielle Betrachtung
- Monaden
- Kleisli-Tripel

Kombinatorische Logik

- Terme
- Typen

Gottfried Wilhelm Leibniz

Monadologie

[Leibniz 1720]

Monadologie, Titel

Monadologie

Des Herrn
Baron von Leibnitz

Lehr-Sätze von den Monaden, von der Seele des Menschen, von seinem Systemate harmoniae praestabilitae zwischen der Seele und dem Körper, von GOtt, seiner Exixtenz, seinen anderen Vollkommenheiten und von der Harmonie zwischen dem Reiche der Natur und dem Reiche der Gnade.

Monadologie, Beginn

1. Die *Monaden*, wovon wir hier reden werden, sind nichts anderes als *einfache* Substanzen, woraus die zusammengesetzten Dinge oder composita bestehen. Unter dem Wort *einfach* verstehet man dasjenige, welches keine Teile hat.

Monadologie, Beginn

1. Die *Monaden*, wovon wir hier reden werden, sind nichts anderes als *einfache* Substanzen, woraus die zusammengesetzten Dinge oder composita bestehen. Unter dem Wort *einfach* verstehet man dasjenige, welches keine Teile hat.
2. Es müssen dergleichen einfache Substanzen sein, weil composita vorhanden sind; denn das *Zusammengesetzte* ist nichts anderes als eine Menge oder ein Aggregat von einfachen Substanzen.

Monadologie, Beginn

1. Die *Monaden*, wovon wir hier reden werden, sind nichts anderes als *einfache* Substanzen, woraus die zusammengesetzten Dinge oder composita bestehen. Unter dem Wort *einfach* verstehet man dasjenige, welches keine Teile hat.
2. Es müssen dergleichen einfache Substanzen sein, weil composita vorhanden sind; denn das *Zusammengesetzte* ist nichts anderes als eine Menge oder ein Aggregat von einfachen Substanzen.
3. Wo nun keine Teile vorhanden sind, daselbst kann auch weder eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Tiefe, noch eine Figur, noch ein Zerteilung möglich sein. Und diese Monaden sind die wahrhaften Atomi der Natur und mit einem Worte die *Elemente der Dinge*.

Monadologie, Fußnote

Das Wort *Monade*, oder Monas, hat bekannter maßen seinen Ursprung im Griechischen, und bedeutet eigentlich *Eines*. Man hat das Wort behalten, weil man vornehme Gelehrte zu Vorgänger hat, die die Kunst-Wörter der Kürze wegen behalten und mit einer teutschen Endigung nach der Gewohnheit der Engelländer und Franzosen gleichsam naturalisieren. Wenn man die Worte Serenaden, Cantaten, Elemente und dergleichen unzählige mehr in der teutschen Sprache beibehält, ohngeachtet es frembde Wörter sind; so habe ich geglaubet, daß es nicht inconvenient gehandelt sei, wenn ich mich um der Kürze willen des Worts, *Monade*, und anderer dergleichen Kunst-Wörter bediene. Viele Dinge scheinen Anfangs ungereimet, weil sie noch nicht gewöhnlich sind; ich halte aber davon, daß das ungewöhnliche, wenn es eine vernünftige Ursache zum Grunde hat, nicht für ungereimt könne gehalten werden.

Kategorientheorie

Bezeichnungen für Monaden

„Standard-Konstruktionen“	[Godement 1958]
„Tripel“	[Eilenberg/Moore 1965]
„Monaden“	[Mac Lane 1971]

Monoide, Definition

Definition.
Ein *Monoid* (M, e, m) besteht aus

- einer Menge M,
- einem Element $e \in M$,
- einer Multiplikationsabbildung $m : M \times M \longrightarrow M$,

mit folgenden Bedingungen (wir schreiben xy für $m(x, y)$):

(M1) $ex = x = xe$ (neutrales Element)

(M2) $x(yz) = (xy)z$ (Assoziativgesetz)

für alle $x, y, z \in M$.

Monoide, Beispiel

Beispiel.
Für jede Menge A ist die Menge aller Listen

$$\mathcal{L}A := \{\, [a_1, \ldots, a_n] \mid a_1, \ldots, a_n \in A,\, n \geqq 0 \,\}$$

mit der Verknüpfung

$$[a_1, \ldots, a_n]\,[b_1, \ldots, b_m] := [a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]$$

und der leeren Liste [] als neutralem Element ein Monoid, das *Listen-Monoid* .

Bijektionen

Hinweis.

Wir identifizieren kartesische Produkte von Mengen mit Hilfe folgender Bijektionen

$$\{\,1\,\} \times M \cong M \cong M \times \{\,1\,\},$$

$$(1, x) \leftrightarrow x \leftrightarrow (x, 1)\,,$$

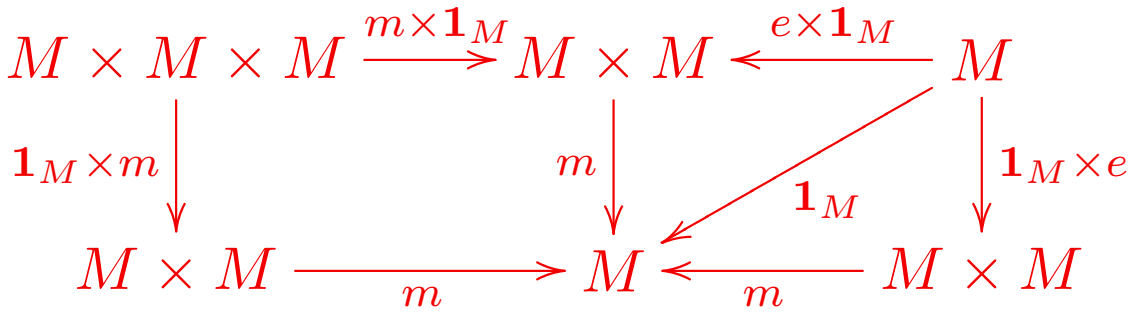
$$(M \times M) \times M \cong M \times (M \times M),$$

$$((x, y), z) \leftrightarrow (x, (y, z))\,.$$

Monoide, Diagramm

Notiz.

Für jedes Monoid (M, e, m) ist



ein kommutatives Diagramm mit

$$(m \times \mathbf{1}_M)\,(x, y, z) = (xy, z), \quad (e \times \mathbf{1}_M)\,x = (e, x)$$
$$(\mathbf{1}_M \times m)\,(x, y, z) = (x, yz), \quad (\mathbf{1}_M \times e)\,x = (x, e)$$

für alle $x, y, z \in M$.

Kategorielle Betrachtung, Funktor

Feststellung.

Für jedes Monoid (M, e, m) haben wir einen Funktor

$$T : \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Set},$$

$$TA := M \times A,$$

$$Tf := M \times f \quad \text{für } f : A \longrightarrow B,$$

wobei $M \times f : M \times A \longrightarrow M \times B$ durch

$$(M \times f)\,(x, a) := (x, f(a))$$

definiert ist.

Kategorielle Betrachtung, natürliche Transformationen

Bemerkung.
Für jedes Monoid (M, e, m) und jede Menge A liefern die Abbildungen

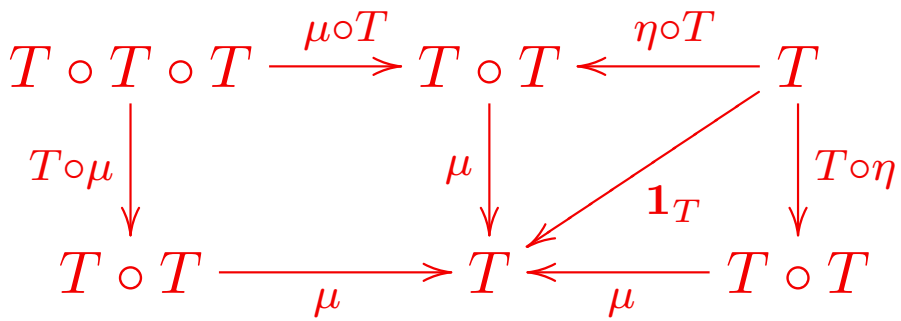
$$\eta_A : A \longrightarrow TA, \qquad \eta_A(a) := (e, a)$$
$$\mu_A : TTA \longrightarrow TA, \qquad \mu_A(x, (x', a)) := (xx', a)$$
$$\text{für alle } a \in A,\ x, x' \in M$$

natürliche Transformationen

$$\eta : \mathbf{1}_{\mathrm{Set}} \longrightarrow T,$$
$$\mu : T \circ T \longrightarrow T.$$

Kategorielle Betrachtung, Funktordiagramm

Beobachtung.
Für jedes Monoid (M, e, m) ist das folgende Diagramm



kommutativ (mit den zuvor definierten T, η, μ).

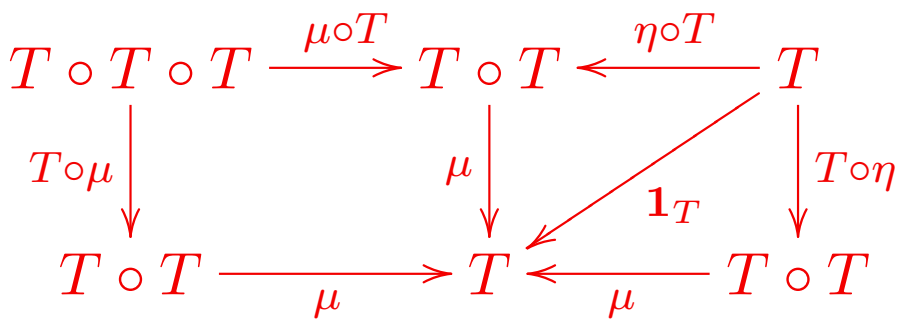
Monaden, Definition

Definition.

Eine *Monade* (T, η, μ) auf einer Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

- einem Funktor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,
- einer natürlichen Transformation $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \longrightarrow T$,
- einer natürlichen Transformation $\mu : T \circ T \longrightarrow T$,

die folgendes Diagramm



kommutativ machen.

Monaden, Beispiel

Beispiel.

Der Listen-Funktor $\mathcal{L} : \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Set}$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}A = \{\, [a_1, \ldots, a_n] \mid a_1, \ldots, a_n \in A,\ n \geqq 0 \,\}$$

$$\mathcal{L}f : \mathcal{L}A \longrightarrow \mathcal{L}B \quad \text{für } f : A \longrightarrow B,$$

$$\mathcal{L}f([a_1, \ldots, a_n]) := [f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

Mit den durch

$$\eta_A : A \longrightarrow \mathcal{L}A, \qquad \eta_A(a) := [a],$$

$$\mu_A : \mathcal{L}\mathcal{L}A \longrightarrow \mathcal{L}A, \quad \mu_A([l_1, \ldots, l_n]) := l_1 \cdots l_n,$$

definierten natürlichen Transformationen η und μ ist $(\mathcal{L}, \eta, \mu)$ eine Monade, die Listen-Monade .

Kleisli-Tripel, Definition

Definition.
Ein *Kleisli-Tripel* $(T, \eta, *)$ über einer Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Abbildung $T : \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$,
- einer Familie $(\eta_A)_{A \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}}$ von Morphismen $\eta_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, TA)$,
- Abbildungen $* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, TB) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(TA, TB), \quad f \mapsto f^*$,

die folgende Bedingungen erfüllen

(K1) $\eta_A^* = \mathbf{1}_{TA}$,

(K2) $f^* \circ \eta_A = f$,

(K3) $g^* \circ f^* = (g^* \circ f)^*$,

für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, TB)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, TC)$, $A, B, C \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$.

Kleisli-Tripel, Proposition

Proposition.

(1) Zu jeder Monade (T, η, μ) ist $(T, \eta, *)$ ein Kleisli-Tripel mit

$$f^* := \mu_b \circ Tf \qquad \text{für } f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, TB),\ A, B \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}.$$

(2) Zu jedem Kleisli-Tripel $(T, \eta, *)$ erhalten wir eine Monade (T, η, μ) mit

$$Th := (\eta_B \circ h)^* \qquad \text{für alle } h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B),\ A, B \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C},$$

$$\mu_A := (\mathbf{1}_{TA})^* \qquad \text{für alle } A \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}.$$

(3) Die Zuordnungen in (1) und (2) liefern eine *kanonische Bijektion* zwischen Monaden und Kleisli-Tripeln.

Kleisli-Tripel, Beispiel

Beispiel.

Bei dem Listen-Funktor $\mathcal{L} : \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Set}$ haben wir

$$f^*([a_1 \ldots, a_n]) = f(a_1) \cdots f(a_n)$$

für $f : A \longrightarrow \mathcal{L}B$, A, B Mengen.

Kombinatorische Logik

Terme

Terme, Kombinatoren

Definition.

Terme der kombinatorischen Logik sind

(i) die *Konstanten* K und S
(und gegebenenfalls weitere Konstanten),

Terme, Kombinatoren

Definition.

Terme der kombinatorischen Logik sind

(i) die *Konstanten* K und S
(und gegebenenfalls weitere Konstanten),

(ii) *Variablen* wie f, g, h, x, y, z ,

Terme, Kombinatoren

Definition.

Terme der kombinatorischen Logik sind

(i) die *Konstanten* K und S
(und gegebenenfalls weitere Konstanten),

(ii) *Variablen* wie f, g, h, x, y, z ,

(iii) *Kombinationen* (MN) von Termen M und N.

Terme, Kombinatoren

Definition.

Terme der kombinatorischen Logik sind

(i) die *Konstanten* K und S
(und gegebenenfalls weitere Konstanten),

(ii) *Variablen* wie f, g, h, x, y, z ,

(iii) *Kombinationen* (MN) von Termen M und N.

Ein Term ohne Variablen wird *Kombinator* genannt
(sofern er keine anderen Konstanten enthält als K und S).

Kombinator-Gleichungen

Interpretation.
Verstehe (MN) als Anwendung einer *Funktion* M auf ein *Argument* N.

Kombinator-Gleichungen

Interpretation.
Verstehe (MN) als Anwendung einer *Funktion* M auf ein *Argument* N.

Schreibweise.
Schreibe (LMN) für $((LM)N)$.
Äußere Klammern können wegfallen.

Kombinator-Gleichungen

Interpretation.
Verstehe (MN) als Anwendung einer *Funktion* M auf ein *Argument* N.

Schreibweise.
Schreibe (LMN) für $((LM)N)$.
Äußere Klammern können wegfallen.

Grundgleichungen.

(K) $\mathrm{K}xy = x$, *Konstanzfunktion*,

(S) $\mathrm{S}xyz = (xz)(yz)$, *Verschmelzungsfunktion*.

Einige Kombinatoren

Problem.

Finde Kombinatoren I, B, E *mit*

(I) $\mathrm{I}x = x$, *Identitätsfunktion* ,

(B) $\mathrm{B}fgx = f(gx)$, *Kompositionsfunktion* ,

(E) $\mathrm{E}xy = yx$, *Einsetzungsfunktion* .

Einige Kombinatoren

Problem.

Finde Kombinatoren I, B, E *mit*

(I) $\mathrm{I}x = x$, *Identitätsfunktion ,*

(B) $\mathrm{B}fgx = f(gx)$, *Kompositionsfunktion ,*

(E) $\mathrm{E}xy = yx$, *Einsetzungsfunktion .*

Lösung.

Folgende Kombinatoren haben die gewünschten Eigenschaften

$$\mathrm{I} := \mathrm{SKK} \ ,$$

$$\mathrm{B} := \mathrm{S(KS)K} \ ,$$

$$\mathrm{E} := \mathrm{B(SI)K} \ .$$

Funktionale Vollständigkeit

Satz (Funktionale Vollständigkeit).
Für jeden Term M und jede Variable x gibt es einen Term F mit $Fx = M$, wobei x in F nicht vorkommt.

Funktionale Vollständigkeit

Satz (Funktionale Vollständigkeit).
Für jeden Term M und jede Variable x gibt es einen Term F mit $Fx = M$, wobei x in F nicht vorkommt.

Folgerung.
Für jeden Term M und für alle paarweise verschiedenen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gibt es einen Term G mit $Gx_1 \ldots x_n = M$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ in G nicht vorkommen.

Beweis

Beweis der funktionalen Vollständigkeit.
Gegeben sind M und x, gesucht F mit $Fx = M$.

Beweis

Beweis der funktionalen Vollständigkeit.

Gegeben sind M und x, gesucht F mit $Fx = M$.

(i) Wenn x nicht in M vorkommt, setze $F := \mathrm{K}M$.

Beweis

Beweis der funktionalen Vollständigkeit.

Gegeben sind M und x, gesucht F mit $Fx = M$.

(i) Wenn x nicht in M vorkommt, setze $F := \mathrm{K}M$.

(ii) Gilt $M = x$, so setze $F := \mathrm{I}$.

Beweis

Beweis der funktionalen Vollständigkeit.

Gegeben sind M und x, gesucht F mit $Fx = M$.

(i) Wenn x nicht in M vorkommt, setze $F := \mathrm{K}M$.

(ii) Gilt $M = x$, so setze $F := \mathrm{I}$.

(iii) Für $M = (M_1 M_2)$ mit $M_1 = F_1 x$ und $M_2 = F_2 x$ setzen wir $F := \mathrm{S}F_1F_2$.

□

λ-Notation

Definition (λ-Notation).

$$\lambda x.x := \mathrm{I}\,,$$

$$\lambda x.M := \mathrm{K}M\,, \qquad \text{wenn } x \text{ nicht in } M \text{ vorkommt,}$$

$$\lambda x.(M_1 M_2) := \mathrm{S}M_1 M_2\,, \qquad \text{wenn } x \text{ in } (M_1 M_2) \text{ vorkommt.}$$

λ-Notation

Definition (λ-Notation).

$$\begin{aligned} \lambda x.x &:= \mathrm{I}\,, \\ \lambda x.M &:= \mathrm{K}M\,, && \text{wenn } x \text{ nicht in } M \text{ vorkommt,} \\ \lambda x.(M_1 M_2) &:= \mathrm{S}M_1 M_2\,, && \text{wenn } x \text{ in } (M_1 M_2) \text{ vorkommt.} \end{aligned}$$

Interpretation.

$\lambda x.M$ ist eine Funktion, die jedem Argument x den Wert M zuordnet (*Funktionsabstraktion*).

Typen

Typenschemata

Definition.

Typenschemata der kombinatorischen Logik sind

(i) gegebenenfalls gewisse *Typkonstanten* (wie `Bool`, `Float`, `Integer`),

Typenschemata

Definition.

Typenschemata der kombinatorischen Logik sind

(i) gegebenenfalls gewisse *Typkonstanten* (wie `Bool`, `Float`, `Integer`),

(ii) *Typenvariablen* wie α, β, γ ,

Typenschemata

Definition.

Typenschemata der kombinatorischen Logik sind

(i) gegebenenfalls gewisse *Typkonstanten* (wie `Bool`, `Float`, `Integer`),

(ii) *Typenvariablen* wie α, β, γ ,

(iii) *Funktionsschemata* $(\sigma_1 \to \sigma_2)$ mit Typenschemata σ_1, σ_2.

Typenschemata

Definition.

Typenschemata der kombinatorischen Logik sind

(i) gegebenenfalls gewisse *Typkonstanten* (wie `Bool`, `Float`, `Integer`),

(ii) *Typenvariablen* wie α, β, γ ,

(iii) *Funktionsschemata* $(\sigma_1 \to \sigma_2)$ mit Typenschemata σ_1, σ_2.

Ein Typenschema ohne Typvariablen wird *Typ* genannt.

Instanzen

Definition.

Instanzen eines Typenschemas σ entstehen aus σ durch Einsetzen gewisser Typenschemata für die Typenvariablen.

Instanzen

Definition.

Instanzen eines Typenschemas σ entstehen aus σ durch Einsetzen gewisser Typenschemata für die Typenvariablen.

Beispiele.

$$\begin{aligned}
\alpha \to (\alpha \to \alpha) \quad &\text{ist Instanz von} \quad \alpha \to (\beta \to \gamma)\ , \\
\alpha \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha) \quad &\text{ist Instanz von} \quad \alpha \to (\beta \to \alpha)\ , \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta) \quad &\text{ist Instanz von} \quad \alpha \to \alpha\ .
\end{aligned}$$

Interpretation für Typenschemata

Interpretation.

Typ τ	$\rightsquigarrow$	Menge A_τ von Termen
$M : \tau$ Term M hat Typ τ	$\rightsquigarrow$	$M \in A_\tau$
Funktionstyp $(\tau_1 \to \tau_2)$	$\rightsquigarrow$	Typ der Funktionen mit Argumenten in τ_1 und Werten in τ_2
Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$\{\tau \mid \tau$ ist Instanz von $\sigma\}$
$M : \sigma$ Term M hat Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$M : \tau$ gilt für alle Instanzen τ von σ

Interpretation für Typenschemata

Interpretation.

Typ τ	$\rightsquigarrow$	Menge A_τ von Termen
$M : \tau$ Term M hat Typ τ	$\rightsquigarrow$	$M \in A_\tau$
Funktionstyp $(\tau_1 \to \tau_2)$	$\rightsquigarrow$	Typ der Funktionen mit Argumenten in τ_1 und Werten in τ_2
Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$\{\tau \mid \tau$ ist Instanz von $\sigma\}$
$M : \sigma$ Term M hat Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$M : \tau$ gilt für alle Instanzen τ von σ

Interpretation für Typenschemata

Interpretation.

Typ τ	$\rightsquigarrow$	Menge A_τ von Termen
$M : \tau$ Term M hat Typ τ	$\rightsquigarrow$	$M \in A_\tau$
Funktionstyp $(\tau_1 \to \tau_2)$	$\rightsquigarrow$	Typ der Funktionen mit Argumenten in τ_1 und Werten in τ_2
Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$\{\tau \mid \tau$ ist Instanz von $\sigma\}$
$M : \sigma$ Term M hat Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$M : \tau$ gilt für alle Instanzen τ von σ

Interpretation für Typenschemata

Interpretation.

Typ τ	$\rightsquigarrow$	Menge A_τ von Termen
$M : \tau$ Term M hat Typ τ	$\rightsquigarrow$	$M \in A_\tau$
Funktionstyp $(\tau_1 \to \tau_2)$	$\rightsquigarrow$	Typ der Funktionen mit Argumenten in τ_1 und Werten in τ_2
Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$\{\tau \mid \tau$ ist Instanz von $\sigma\}$
$M : \sigma$ Term M hat Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$M : \tau$ gilt für alle Instanzen τ von σ

Interpretation für Typenschemata

Interpretation.

Typ τ	$\rightsquigarrow$	Menge A_τ von Termen
$M : \tau$ Term M hat Typ τ	$\rightsquigarrow$	$M \in A_\tau$
Funktionstyp $(\tau_1 \to \tau_2)$	$\rightsquigarrow$	Typ der Funktionen mit Argumenten in τ_1 und Werten in τ_2
Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$\{\tau \mid \tau$ ist Instanz von $\sigma\}$
$M : \sigma$ Term M hat Typenschema σ	$\rightsquigarrow$	$M : \tau$ gilt für alle Instanzen τ von σ

Axiome, Regel

Schreibweise.

Schreibe $(\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3)$ für $(\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3))$.

Äußere Klammern können wegfallen.

Axiome, Regel

Schreibweise.

Schreibe $(\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3)$ für $(\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3))$.
Äußere Klammern können wegfallen.

Axiome.

$$\mathrm{K} : \alpha \to \beta \to \alpha\,,$$

$$\mathrm{S} : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\,.$$

Axiome, Regel

Schreibweise.
Schreibe $(\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3)$ für $(\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3))$.
Äußere Klammern können wegfallen.

Axiome.

$$\mathrm{K} : \alpha \to \beta \to \alpha\,,$$
$$\mathrm{S} : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\,.$$

Regel.

$$M : \sigma_1 \to \sigma_2 \quad \text{und} \quad N : \sigma_1 \implies (MN) : \sigma_2$$

Beispiel

Beispiel.

$\mathrm{I} : \alpha \to \alpha$, denn

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &: (\alpha \to (\beta \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha) \\
\mathrm{K} &: \alpha \to (\beta \to \alpha) \to \alpha \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{SK} &: (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)\,, \\
\mathrm{K} &: \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\Longrightarrow \quad \mathrm{SKK} &: \alpha \to \alpha\,, \\
\text{und} \quad \mathrm{SKK} &= \mathrm{I}\,.
\end{aligned}$$

□

Typinferenz

Bemerkung.

SII hat gar kein Typenschema $(\mathrm{SII}x = xx)$.

Typinferenz

Bemerkung.
SII hat gar kein Typenschema $(\mathrm{SII}x = xx)$.

Satz [Hindley 1969].

(1) *Es gibt ein* Entscheidungsverfahren *um festzustellen, ob ein Kombinator C ein Typenschema hat oder nicht.*

Typinferenz

Bemerkung.
SII hat gar kein Typenschema $(\mathrm{SII}x = xx)$.

Satz [Hindley 1969].

(1) *Es gibt ein* Entscheidungsverfahren *um festzustellen, ob ein Kombinator C ein Typenschema hat oder nicht.*

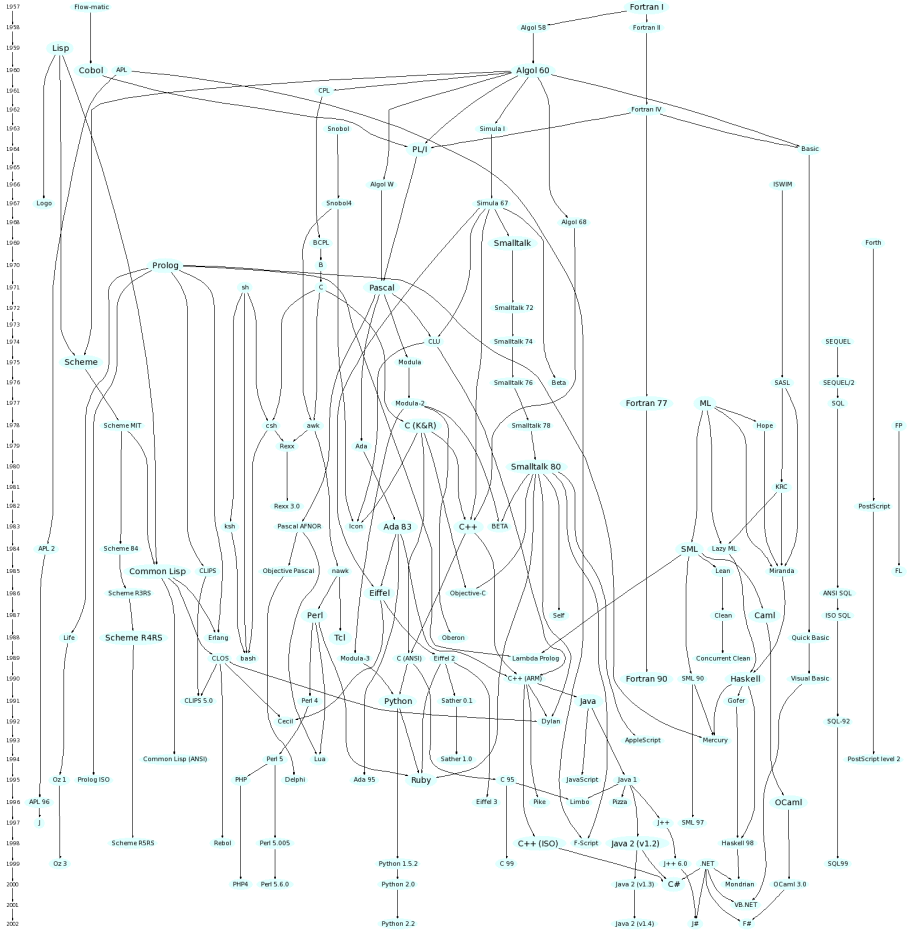
(2) *Gegebenenfalls lässt sich zu C ein* allgemeinstes Typenschema *σ berechenen, das heißt wir haben $C : \sigma$, und $C : \sigma'$ gilt nur für Instanzen σ' von σ.*

II. Praxis

Inhalt von Teil II

Funktionales Programmieren

Programmiersprachen



Begriff

Imperatives Programmieren ist ein Programmierstil, der die *Ausführung von Befehlen* betont.

Begriff

Imperatives Programmieren ist ein Programmierstil, der die *Ausführung von Befehlen* betont.

Funktionales Programmieren ist ein Programmierstil, der die *Auswertung von Ausdrücken* betont;
die Ausdrücke werden dabei unter Verwendung von *Funktionen* aus grundlegenden *Werten* kombiniert.

Begriff

Imperatives Programmieren ist ein Programmierstil, der die *Ausführung von Befehlen* betont.

Funktionales Programmieren ist ein Programmierstil, der die *Auswertung von Ausdrücken* betont;
die Ausdrücke werden dabei unter Verwendung von *Funktionen* aus grundlegenden *Werten* kombiniert.

Funktionale Programmiersprachen unterstützen und ermutigen das Programmieren im funktionalen Stil.

[Hutton 2002]

Beispiel

Aufgabe.
Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis 10.

Beispiel

Aufgabe.
Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis 10.

Imperative Lösung.
C-Programm :

```
summe = 0;
for (i=1; i<=10; i++)
    summe += i;
```

Beispiel

Aufgabe.
Berechne die Summe der ganzen Zahlen von 1 bis 10.

Imperative Lösung.
C-Programm :

```
summe = 0;
for (i=1; i<=10; i++)
    summe += i;
```

Funktionale Lösung.
Haskell-Programm :

```
sum [1..10]
```

Wurzeln

Kombinatorische Logik [Schönfinkel 1924] [Curry 1929] ...

Wurzeln

Kombinatorische Logik	[Schönfinkel 1924]	[Curry 1929] ...
Lambda-Kalkül	[Church 1932–33]	[Church 1941]

Wurzeln

Kombinatorische Logik	[Schönfinkel 1924]	[Curry 1929] ...
Lambda-Kalkül	[Church 1932–33]	[Church 1941]
Typentheorie	[Church 1940]	[Hindley 1969]

Wurzeln

Kombinatorische Logik	[Schönfinkel 1924]	[Curry 1929] ...
Lambda-Kalkül	[Church 1932–33]	[Church 1941]
Typentheorie	[Church 1940]	[Hindley 1969]
Programmierung	[Milner 1978]	

Wurzeln

Kombinatorische Logik	[Schönfinkel 1924]	[Curry 1929] ...
Lambda-Kalkül	[Church 1932–33]	[Church 1941]
Typentheorie	[Church 1940]	[Hindley 1969]
Programmierung	[Milner 1978]	[Backus 1978]

↓

"Can programming be liberated from the von Neumann style?"

Funktionale Programmiersprachen

1960	**Lisp** (John Mc Carthy)	*Listen*
	Dialekte: **Common Lisp**	Künstliche Intelligenz
	Scheme	

Funktionale Programmiersprachen

1960	**Lisp** (John Mc Carthy)	*Listen*
	Dialekte: **Common Lisp**	Künstliche Intelligenz
	Scheme	
1978	**FP** (John Backus)	*Funktionen höherer Ordnung*

Funktionale Programmiersprachen

1960	**Lisp** (John Mc Carthy) Dialekte: **Common Lisp** **Scheme**	*Listen* Künstliche Intelligenz
1978	**FP** (John Backus)	*Funktionen höherer Ordnung*
1978	**ML** (Robin Milner et al.) Dialekte: **Standard ML** **Caml**	*Typinferenz* Beweisassistenten: Isabelle, Nuprl, Coq

Funktionale Programmiersprachen

1960	**Lisp** (John Mc Carthy) Dialekte: **Common Lisp** **Scheme**	*Listen* Künstliche Intelligenz
1978	**FP** (John Backus)	*Funktionen höherer Ordnung*
1978	**ML** (Robin Milner et al.) Dialekte: **Standard ML** **Caml**	*Typinferenz* Beweisassistenten: Isabelle, Nuprl, Coq
1985	**Miranda**$_{\text{TM}}$ (David Turner)	*nicht-strikt*

Funktionale Programmiersprachen

1960	**Lisp** (John Mc Carthy) Dialekte: **Common Lisp** **Scheme**	*Listen* Künstliche Intelligenz
1978	**FP** (John Backus)	*Funktionen höherer Ordnung*
1978	**ML** (Robin Milner et al.) Dialekte: **Standard ML** **Caml**	*Typinferenz* Beweisassistenten: Isabelle, Nuprl, Coq
1985	**Miranda**$_{\text{TM}}$ (David Turner)	*nicht-strikt*
1988	**Erlang** (Ericsson)	Telekommunikation

Funktionale Programmiersprachen

1960	**Lisp** (John Mc Carthy) Dialekte: **Common Lisp** **Scheme**	*Listen* Künstliche Intelligenz
1978	**FP** (John Backus)	*Funktionen höherer Ordnung*
1978	**ML** (Robin Milner et al.) Dialekte: **Standard ML** **Caml**	*Typinferenz* Beweisassistenten: Isabelle, Nuprl, Coq
1985	**Miranda**$_{\text{TM}}$ (David Turner)	*nicht-strikt*
1988	**Erlang** (Ericsson)	Telekommunikation
1990	**Haskell**	*Typenklassen, Monaden,* *rein funktional*

Haskell B. Curry

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

1991 Haskell Version 1.1 (Typenklassen)

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

1991 Haskell Version 1.1 (Typenklassen)

1992 Haskell Version 1.2 (polymorphe Klassenmethoden)

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

1991 Haskell Version 1.1 (Typenklassen)

1992 Haskell Version 1.2 (polymorphe Klassenmethoden)

1996 Haskell Version 1.3 (Typkonstruktorklassen, mit Monaden und monadischer do-Notation)

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

1991 Haskell Version 1.1 (Typenklassen)

1992 Haskell Version 1.2 (polymorphe Klassenmethoden)

1996 Haskell Version 1.3 (Typkonstruktorklassen, mit Monaden und monadischer do-Notation)

1997 Haskell Version 1.4 (mit Monaden, mit „monadischer Mengen-Notation“)

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

1991 Haskell Version 1.1 (Typenklassen)

1992 Haskell Version 1.2 (polymorphe Klassenmethoden)

1996 Haskell Version 1.3 (Typkonstruktorklassen, mit Monaden und monadischer do-Notation)

1997 Haskell Version 1.4 (mit Monaden, mit „monadischer Mengen-Notation“)

1998 **Haskell 98** (mit Monaden, ohne „monadische Mengen-Notation“)

Haskell, Entwicklung

1987 Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture in Portland, Oregon: *Komitee* zum Entwurf einer funktionalen Standardsprache wird eingesetzt.

1990 Haskell Version 1.0 (benannt nach Haskell B. Curry)

1991 Haskell Version 1.1 (Typenklassen)

1992 Haskell Version 1.2 (polymorphe Klassenmethoden)

1996 Haskell Version 1.3 (Typkonstruktorklassen, mit Monaden und monadischer do-Notation)

1997 Haskell Version 1.4 (mit Monaden, mit „monadischer Mengen-Notation“)

1998 **Haskell 98** (mit Monaden, ohne „monadische Mengen-Notation“) **2002** überarbeitet

Haskell, Grundsätzliches

Grundsätzliches.

1. Haskell ist eine *rein funktionale Programmiersprache* :

   Alle Berechnungen kommen durch *Auswertung von Ausdrücken* zustande, deren Ergebnis *Werte* sind.

Haskell, Grundsätzliches

Grundsätzliches.

1. Haskell ist eine *rein funktionale Programmiersprache* :

   Alle Berechnungen kommen durch *Auswertung von Ausdrücken* zustande, deren Ergebnis *Werte* sind.

2. In Haskell sind auch *Funktionen als Werte* uneingeschränkt zugelassen.

   Insbesondere können *Funktionen höherer Ordnung* verwendet werden, also Funktionen, deren Argumente oder Ergebniswerte selbst Funktionen sind.

Haskell, Grundsätzliches

Grundsätzliches.

1. Haskell ist eine *rein funktionale Programmiersprache* :

   Alle Berechnungen kommen durch *Auswertung von Ausdrücken* zustande, deren Ergebnis *Werte* sind.

2. In Haskell sind auch *Funktionen als Werte* uneingeschränkt zugelassen.

   Insbesondere können *Funktionen höherer Ordnung* verwendet werden, also Funktionen, deren Argumente oder Ergebniswerte selbst Funktionen sind.

3. Haskell ist *statisch typisiert* :

   Jeder Wert besitzt einen Typ, der vor Ausführung des Programmes bestimmt werden kann.

Haskell

Werte

Haskell-Werte

Primitive Werte.

`6`	ganzzahliger Wert
`3.14`	Gleitkomma-Wert
`2.0E-5`	Gleitkomma-Wert
`'q'`	Schriftzeichen-Wert

Haskell-Werte

Primitive Werte.

`6`	ganzzahliger Wert
`3.14`	Gleitkomma-Wert
`2.0E-5`	Gleitkomma-Wert
`'q'`	Schriftzeichen-Wert

Zusammengesetzte Werte.

`[7,8]`	Liste ganzer Zahlen
`['x','y','z']`	Liste von Schriftzeichen
`(9,10.0)`	Paar aus ganzer Zahl und GleitkommaZahl
`(11.0,'B',[13])`	Tripel aus Gleitkomma-Zahl, Schriftzeichen und Liste ganzer Zahlen

Haskell-Funktionen

Definition durch Gleichungen.

```
inc n          =  n+1      Nachfolgerfunktion
constfour x    =  4        konstante Funktion
id y           =  y        identische Funktion
fst (x,y)      =  x        Projektionsfunktion
```

Haskell-Funktionen

Definition durch Gleichungen.

```
inc n          =  n+1      Nachfolgerfunktion
constfour x    =  4        konstante Funktion
id y           =  y        identische Funktion
fst (x,y)      =  x        Projektionsfunktion
```

Definition mit λ-Notation.

`inc`	=	`\n -> n+1`	$n \mapsto n + 1$
`constfour`	=	`\x -> 4`	$x \mapsto 4$
`id`	=	`\y -> y`	$y \mapsto y$
`fst`	=	`\(x,y) -> x`	$(x,y) \mapsto x$

Funktionsanwendung

Funktionsanwendung.

`inc 6`	liefert den Wert	7
`constfour 6`	liefert den Wert	4
`constfour 3.14`	liefert den Wert	4
`id 6`	liefert den Wert	6
`id 3.14`	liefert den Wert	3.14
`fst (9,10.0)`	liefert den Wert	9

Funktionen höherer Ordnung

Funktionen als Werte.

```
add r s     =   r+s
          ⇝ add = \r s -> r+s := \r -> (\s -> r+s)

const x y   =   x
          ⇝ const = \x y -> x := \x -> (\y -> x)
```

Funktionen höherer Ordnung

Funktionen als Werte.

```
add r s     =   r+s
          ⇝ add = \r s -> r+s := \r -> (\s -> r+s)

const x y   =   x
          ⇝ const = \x y -> x := \x -> (\y -> x)
```

Funktionen als Argumente.

```
compose f g x   =   g(f x)
                ⇝ compose = \f g x -> g(f x)

twice f         =   compose f f
                ⇝ twice = \f x -> f(f x)

flip f          =   \x y -> f y x
                ⇝ flip = \f x y -> f y x
```

Typen

Haskell-Typen

Schreibweise.

`w :: T` besagt, dass der Ausdruck `w` den Typ `T` hat.

Haskell-Typen

Schreibweise.

`w :: T` besagt, dass der Ausdruck `w` den Typ `T` hat.

Beispiele.

```
     6   ::  Integer                    ganzzahliger Typ
  3.14   ::  Float                      Gleitkomma-Typ
   'q'   ::  Char                       Schriftzeichen-Typ
 [7,8]   ::  [Integer]                  Listen-Typ
(9,10.0) ::  (Integer,Float)            Paar-Typ
   inc   ::  Integer -> Integer         Funktionstyp
   add   ::  Integer -> Integer -> Integer
                                        Funktionstyp höherer Ordnung
```

Polymorphe Haskell-Typen

Bemerkung.
Haskell-Typen können auch Typenvariablen enthalten, es handelt sich dann um *polymorphe Typen* .

Polymorphe Haskell-Typen

Bemerkung.
Haskell-Typen können auch Typenvariablen enthalten, es handelt sich dann um *polymorphe Typen* .

Beispiele.

```
constfour  ::  a -> Integer
      id   ::  a -> a
     fst   ::  (a,b) -> a
   const   ::  a -> b -> a
 compose   ::  (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)
   twice   ::  (a -> a) -> (a -> a)
    flip   ::  (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
```

Typensynonyme

Typensynonyme werden durch Definition eines neuen Namens für häufig verwendete Typen eingeführt.

Typensynonyme

Typensynonyme werden durch Definition eines neuen Namens für häufig verwendete Typen eingeführt.

Beispiele.

```
type  Alter          =  Integer
type  Name           =  [Char]
type  Person         =  (Name,Alter)
type  Datum          =  (Integer,Integer,Integer)

type  Liste a        =  [a]
type  Fun a b        =  a -> b
type  Paar a b       =  (a,b)
type  Tripel a b c   =  (a,b,c)
```

Datentypen

Datentypen ermöglichen es, neue Typen durch Angabe von *Konstruktoren* einzuführen.

Beispiele.

```
data  Farbe        =  Blau | Gelb | Rot

data  Jahreszeit   =  Fruehling
                   |  Sommer
                   |  Herbst
                   |  Winter
```

Datentypen

Datentypen ermöglichen es, neue Typen durch Angabe von *Konstruktoren* einzuführen.

Beispiele.

```
data  Farbe       =  Blau | Gelb | Rot

data  Jahreszeit  =  Fruehling
                  |  Sommer
                  |  Herbst
                  |  Winter
```

Datentypen

Datentypen ermöglichen es, neue Typen durch Angabe von *Konstruktoren* einzuführen.

Beispiele.

```
data  Farbe       =  Blau | Gelb | Rot

data  Jahreszeit  =  Fruehling
                  |  Sommer
                  |  Herbst
                  |  Winter
```

Vordefinierte Datentypen.

```
data  Bool      =  True | False

data  Ordering  =  LT | EQ | GT
```

Typkonstruktoren

Hinweis.

Datentypen können auch von Typvariablen abhängen, man spricht dann von *Typkonstruktoren* .

Typkonstruktoren

Hinweis.
Datentypen können auch von Typvariablen abhängen, man spricht dann von *Typkonstruktoren* .

Beispiele.

```
data   Punkt  a       =  Pt a a
       ⟹  Pt :: a -> a -> Punkt a

data   Praedikat  a  =  Praed (a -> Bool)
       ⟹  Praed :: (a -> Bool) -> Praedikat a
```

Typkonstruktoren

Vordefinierte Typkonstruktoren.

```
data   Maybe  a     =  Just a
                    |  Nothing
       ⟹   Just     :: a -> Maybe a
            Nothing :: Maybe a

data   Either  a b  =  Left a
                    |  Right b
       ⟹   Left   :: a -> Either a b
            Right  :: b -> Either a b
```

Rekursive Datentypen

Notiz.

Die Konstruktoren eines Datentyps dürfen Argumente haben, die von diesem Datentyp selber abhängen.

In diesem Fall spricht man von *rekursiven Datentypen*

Rekursive Datentypen

Notiz.

Die Konstruktoren eines Datentyps dürfen Argumente haben, die von diesem Datentyp selber abhängen.
In diesem Fall spricht man von *rekursiven Datentypen*

Beispiele.

```
data  Nat      =  Zero
               |  Succ Nat
      ⟹  Zero :: Nat
          Succ :: Nat -> Nat

data  Tree  a  =  Leaf a
               |  Branch (Tree a) (Tree a)
      ⟹  Leaf   :: a -> Tree a
          Branch :: Tree a -> Tree a -> Tree a
```

Listen rekursiv definiert

Beobachtung.

Haskell-Listen verhalten sich wie die Werte des folgenden rekursiven Datentyps.

```
data List a = Nil
            | Cons a (List a)
```

$\Longrightarrow$

```
Nil  :: List a
Cons :: a -> List a -> List a
```

Listen rekursiv definiert

Beobachtung.

Haskell-Listen verhalten sich wie die Werte des folgenden rekursiven Datentyps.

```
data List a = Nil
            | Cons a (List a)
```

$\Longrightarrow$

```
Nil  :: List a
Cons :: a -> List a -> List a
```

Notation.

`[]`	steht für	`Nil`
`x:l`	steht für	`Cons x l`
$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$	steht für	$x_1 : (x_2 : \cdots x_n : \texttt{Nil})$

Funktionen auf Datentypen

Definition durch Gleichungen.

```
not :: Bool -> Bool        Negationsfunktion
not True     =  False
not False    =  True

pred :: Nat -> Nat         Vorgängerfunktion
pred Zero    =  Zero
pred Succ n  =  n
```

Funktionen auf Datentypen

Definition durch Gleichungen.

```
not :: Bool -> Bool        Negationsfunktion
not True     =  False
not False    =  True

pred :: Nat -> Nat         Vorgängerfunktion
pred Zero    =  Zero
pred Succ n  =  n
```

Definition mit `case`-Ausdrücken.

```
not x   =  case x of  True    ->  False
                      False   ->  True
pred k  =  case k of  Zero     ->  Zero
                      Succ n  ->  n
```

Listen-Funktionen

Beispiele.

```
append :: [a] -> [a] -> [a]      Monoid-Verknüpfung
append Nil l'     =  l'
append (x:l) l'   =  x : (append l l')

map :: (a -> b) -> ([a] -> [b])      Funktorfunktion
map f Nil         =  Nil
map f (x:l)       =  (f x) : (map f l)

concat :: [[a]] -> [a]       Transformationsfunktion
concat Nil        =  Nil
concat (x:l)      =  append x (concat l)
```

Typenklassen

Ad-hoc-Polymorphismus

Philip Wadler, Stephen Blott:

"How to make ad-hoc polymorphism less ad hoc."

[Wadler/Blott 1989]

Ad-hoc-Polymorphismus

Philip Wadler, Stephen Blott:

> "How to make ad-hoc polymorphism less ad hoc."

[Wadler/Blott 1989]

Parametrischer Polymorphismus.
Polymorphe Funktionen haben eine *gleichartige Definition* für verschieden Typen.

Ad-hoc-Polymorphismus

Philip Wadler, Stephen Blott:

> "How to make ad-hoc polymorphism less ad hoc."

[Wadler/Blott 1989]

Parametrischer Polymorphismus.
Polymorphe Funktionen haben eine *gleichartige Definition* für verschieden Typen.

Ad-hoc-Polymorphismus.
Überladene Funktionen, die für mehrere „gleichartige" Typen definiert sind, haben *verschiedene Definitionen* für verschieden Typen.

Ad-hoc-Polymorphismus

Beispiel.

Parametrischer Polymorphismus

```
id :: a -> a
id x = x
```

```
id :: Farbe -> Farbe
id x = x
```

```
id :: Bool -> Bool
id x = x
```

Ad-hoc-Polymorphismus

Beispiel.

Parametrischer Polymorphismus

```
id :: a -> a
id x = x
```

```
id :: Farbe -> Farbe
id x = x
```

```
id :: Bool -> Bool
id x = x
```

Ad-hoc-Polymorphismus

```
eq :: Farbe -> Farbe -> Bool
eq Blau Blau   =  True
eq Gelb Gelb   =  True
eq Rot Rot     =  True
eq _ _         =  False

eq :: Bool -> Bool -> Bool
eq True True   =  True
eq False False =  True
eq _ _         =  False
```

Haskell-Typenklassen

In Haskell kann Ad-hoc-Polymorphismus (das Überladen von Funktionen) durch einen *Typenklassen-Mechanismus* erreicht werden.

Haskell-Typenklassen

In Haskell kann Ad-hoc-Polymorphismus (das Überladen von Funktionen) durch einen *Typenklassen-Mechanismus* erreicht werden.
Bei der Definition einer *Typenklasse* die zugehörigen werden *Klassenmethoden* angegeben.

Beispiel.

```
class Eq a where
  eq    ::  a -> a -> Bool
  noteq ::  a -> a -> Bool
```

Haskell-Typenklassen

In Haskell kann Ad-hoc-Polymorphismus (das Überladen von Funktionen) durch einen *Typenklassen-Mechanismus* erreicht werden.
Bei der Definition einer *Typenklasse* die zugehörigen werden *Klassenmethoden* angegeben.

Beispiel.

```
class Eq a where
  eq    :: a -> a -> Bool
  noteq :: a -> a -> Bool
```

Haskell-Typenklassen

In Haskell kann Ad-hoc-Polymorphismus (das Überladen von Funktionen) durch einen *Typenklassen-Mechanismus* erreicht werden.
Bei der Definition einer *Typenklasse* die zugehörigen werden *Klassenmethoden* angegeben.

Beispiel.

```
class Eq a where
  eq    :: a -> a -> Bool
  noteq :: a -> a -> Bool
```

Die Klassenmethoden haben den Typ

```
eq    :: Eq a => a -> a -> Bool
noteq :: Eq a => a -> a -> Bool
```

(*eingeschränkter Polymorphismus*).

Klasseninstanzen

Um zu einen Typ als zu einer Klasse gehörig zu erkennen wird die betreffende *Instanz* der Klasse gebildet, indem für jede Methode der Klasse eine passende Definition angegeben wird.

Klasseninstanzen

Um zu einen Typ als zu einer Klasse gehörig zu erkennen wird die betreffende *Instanz* der Klasse gebildet, indem für jede Methode der Klasse eine passende Definition angegeben wird.

Beispiel.

```
instance Eq Farbe where
eq Blau Blau          =  True
eq Gelb Gelb          =  True
eq Rot Rot            =  True
eq _ _                =  False
noteq x y             =  not (eq x y)
```

Typkonstruktor-Klassen

Seit Version 1.3 ist es in Haskell auch erlaubt Klassen und Instanzen für Typkonstruktoren zu definieren.

Typkonstruktor-Klassen

Seit Version 1.3 ist es in Haskell auch erlaubt Klassen und Instanzen für Typkonstruktoren zu definieren.

Beispiel.

```
class Functor f where
    fmap :: (a -> b) -> (f a -> f b)

instance Functor Maybe where
   fmap f Nothing   =  Nothing
   fmap f (Just x)  =  Just (f x)
instance Functor List where
    fmap = map
```

Warnung

Hinweis.

Die Funktorgesetze

(F1) `fmap id = id`

(F2) `fmap (compose g f) = compose (fmap g) (fmap f)`

werden von Haskell *nicht* überprüft .

Haskell-Monaden

Literaturhinweise

Eugenio Moggi Computational lambda-calculus and monads. [Moggi 1989]

Literaturhinweise

Eugenio Moggi Computational lambda-calculus and monads. [Moggi 1989]

Philip Wadler Comprehending monads. [Wadler 1992]

Philip Wadler Monads for functional programming. [Wadler 1995]

Eine Monaden-Klasse

Nun können wir Monaden in Haskell definieren.

Eine Monaden-Klasse

Nun können wir Monaden in Haskell definieren.

Beispiel.

```
class Monade m where
      unit :: a -> m a
      join :: m (m a) -> m a

instance Monade Maybe where
      unit = Just
      join Nothing    =  Nothing
      join (Just x)   =  x
instance Monade List where
      unit x = [x]
      join = concat
```

Warnung

Hinweis.

Die Monadengesetze werden von Haskell *nicht* überprüft .

Monaden in Haskell

Tatsächlich wird die *Monaden-Klasse* in Haskell eher wie ein Kleisli-Tripel definiert.

Monaden in Haskell

Tatsächlich wird die *Monaden-Klasse* in Haskell eher wie ein Kleisli-Tripel definiert.

Definition.

```
class Monad m where
      bind :: m a -> (a -> m b) -> m b
      bindconst :: m a -> m b -> m b
      return :: a -> m a
      fail :: String -> m a
```

Maybe-Monade

```
instance Monad Maybe where

    bind Nothing f   =  Nothing
    bind (Just x) f  =  f x

    bindconst u v = bind u (const v)

    return = Just

    fail s = Nothing
```

List-Monade

```
instance Monad List  where

      bind l f = concat (map f l)

      bindconst l l' = bind l (const l')

      return x = [x]

      fail s = Nil
```

Monadische `do`-Notation

Um monadische Programme übersichtlicher schreiben zu können wird die *monadische* `do`*-Notation* verwendet.

Monadische `do`-Notation

Um monadische Programme übersichtlicher schreiben zu können wird die *monadische* `do`*-Notation* verwendet.

Schreibweise.

`do` *x* `<-` *e* *Zeilen*	steht für	`bind` *e* (`\`*x* `->` `do` *Zeilen*)
`do` *e* *Zeilen*	steht für	`bindconst` *e* (`do` *Zeilen*)
`do` *e*	steht für	*e*

Monadische `do`-Notation

Um monadische Programme übersichtlicher schreiben zu können wird die *monadische* `do`*-Notation* verwendet.

Schreibweise.

`do`	*x* `<-` *e* *Zeilen*	steht für	`bind` *e* (`\`*x* `->` `do` *Zeilen*)
`do`	*e* *Zeilen*	steht für	`bindconst` *e* (`do` *Zeilen*)
`do` *e*		steht für	*e*

Monadische `do`-Notation

Um monadische Programme übersichtlicher schreiben zu können wird die *monadische* `do`*-Notation* verwendet.

Schreibweise.

`do`	*x* `<-` *e* *Zeilen*	steht für	`bind` *e* (`\`*x* `->` `do` *Zeilen*)
`do`	*e* *Zeilen*	steht für	`bindconst` *e* (`do` *Zeilen*)
`do` *e*		steht für	*e*

Programmier-Beispiele

Funktionale Programmierung

Aufgabe.

Finde heraus, ob in einer Liste `l :: List a` ein Element `x` mit einer bestimmten Eigenschaft `p :: a->Bool` vorkommt, und berechne gegebenenfalls ein solches `x`.

Funktionale Programmierung

Aufgabe.

Finde heraus, ob in einer Liste `l :: List a` ein Element `x` mit einer bestimmten Eigenschaft `p :: a->Bool` vorkommt, und berechne gegebenenfalls ein solches `x`.

Bibliotheksfunktion.

```
filter :: (a->Bool) -> [a] -> [a]
filter p Nil    = Nil
filter p (x:l) = case  p x   of
                       True  -> x : (filter p l)
                       False -> filter p l
```

Funktionale Programmierung

Haskell-Programm.

```
listToMaybe :: [a] -> Maybe a

listToMaybe Nil    = Nothing

listToMaybe (x:l) = Just x


find :: (a->Bool) -> [a] -> Maybe a

find p = compose listToMaybe (filter p)
```

Monadische Programmierung

Aufgabe.
Finde heraus, ob es in einer Liste `l :: List a`
Elemente `x` und `x'` gibt, die den Eigenschaften
`p :: a->Bool` beziehungsweise `p' :: a->Bool` genügen,
und berechne gegebenenfalls ein solches Paar `(x,x')`.

Monadische Programmierung

Aufgabe.
Finde heraus, ob es in einer Liste `l :: List a`
Elemente `x` und `x'` gibt, die den Eigenschaften
`p :: a->Bool` beziehungsweise `p' :: a->Bool` genügen,
und berechne gegebenenfalls ein solches Paar `(x,x')`.

Haskell-Programm mit `do`-Notation.

```
find2 :: (a->Bool) -> (a->Bool) -> [a] -> Maybe(a,a)
find2 p p' l =  do  x  <- find p l
                    x' <- find p' l
                    return (x,x')
```

Monadische Programmierung ohne do-Notation

Haskell-Programm ohne do-Notation.

```
find2 :: (a->Bool) -> (a->Bool) -> [a] -> Maybe(a,a)

find2 p p' l =  bind (find p l) (\x ->
                bind (find p' l) (\x' ->
                return (x,x')))
```

Ende

Literatur

- John Backus:
  Can programming be liberated from the von Neuman style?
  Comm. ACM **21** (1978) 613–641.
- Alonzo Church: *A set of postulates for the foundation of logic.*
  Annals of Math. **33** (1932) 346–366, Annals of Math. **34** (1933) 839–864.
- Alonzo Church: *A formulation of the simple theory of types.*
  J. Symbolic Logic **5** (1940) 56–68.
- Alonzo Church: *The calculi of lambda-conversion.*
  Princeton Univ. Press, Princeton 1941.
  [Reprinted by Kraus Reprint Corporation, New York 1965.]
- Haskell B. Curry: *An Analysis of Logical Substitution.*
  Amer. J. Math. **51** (1929) 363–384.

- Samuel Eilenberg, John C. Moore: *Adjoint functors and triples.* Ill. J. Math. **9** (1965) 381–398.
- Roger Godement: *Théorie des Faisceaux.* Hermann, Paris 1958.
- Roger Hindley: *The Principal type-scheme of an object in combinatory logic.* Trans. Amer. Math. Soc. **146** (1969), 29–60.
- Graham Hutton: *Frequently Asked Questions for comp.lang.functional .* November 2002, Internet: `http://www.cs.nott.ac.uk/~gmh/faq.html` .
- H. Kleisli: *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors.* Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 544–546.

- Gottfried Wilhelm Leibniz: *Monadologie.*
  Franckfurth und Leipzig 1720.
  [Posthum herausgegebene Übersetzung aus dem Französischen von Heinrich Köhler (1685–1737).]
- Saunders Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician.*
  Springer-Verlag, New York 1971.
- Robin Milner: *A Theory of Type Polymorphism in Programming.*
  Journal of Computer and System Sciences **17** (1978) 348–375.
- Eugenio Moggi: *Computational lambda-calculus and monads.*
  Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science Proceedings, IEEE 1989.

- Moses Schönfinkel:
  Über die Bausteine der mathematischen Logik.
  Math. Annalen **92** (1924) 305–316.
- Philip Wadler, Stephen Blott:
  How to make ad-hoc polymorphism less ad hoc.
  ACM Symposium on Principles of Programming Languages, Austin, Texas, January 1989.
- Philip Wadler: *Comprehending monads.*
  P. 461–493 in Mathematical Structures in Computer Science, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.
- Philip Wadler: *Monads for functional programming.*
  P. 24–52 in Johann Jeuring, Erik Meijer (eds.): Advanced Functional Programming, Springer 1995 (LNCS 925).